Capítulo 2

Series y transformadas de Fourier

Las series de Fourier son series de términos coseno y seno y surgen en la tarea práctica de representar funciones periódicas generales. Como aplicación constituyen una herramienta muy importante en la solución de problemas en los que intervienen ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.

La teoría de las series de Fourier es bastante complicada, pero la aplicación de estas series es simple. Las series de Fourier son, en cierto sentido, más universales que las series de Taylor, ya que muchas funciones periódicas discontinuas pueden desarrollarse en serie de Fourier, pero, desde luego, no tienen representaciones en serie de Taylor.

La introducción de las series de Fourier (y de las integrales de Fourier) fue uno de los mayores avances jamas realizados en la física matemática y en sus aplicaciones en la ingeniería, ya que las series de Fourier (y las integrales de Fourier) son probablemente la herramienta más importante en la solución de problemas con valores en la frontera. Esto se explicará en el capítulo siguiente.

La transformada de Laplace es con mucho la transformada integral más importante en ingeniería. Desde el punto de vista de las aplicaciones, las si guientes en importancia serían quizás la transformada de Fourier, aún cuando su manejo resulta un tanto más difícil que la transformada de Laplace

2.1. Series trigonométricas

Diremos que una función $f(t)$ es periódica, o p–periódica, si está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ y si existe $p > 0$, tal que

$$f(t+p) = f(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Al número p lo llamaremos periodo de $f(t)$. La gráfica de esta función se obtiene por repetición periódica de su gráfica en cualquier intervalo de longitud p.

Ejemplo 1 *Las funciones* $\sin t$ *y* $\cos t$ *son funciones periódicas de periodo* 2π*. Las funciones constantes son funciones periódicas de cualquier periodo (en el sentido de la definición).*

Ejemplo de funciones que no son periódicas son t*,* t^2*,* e^t *y* $\ln t$*.*

Si $f(t)$ y $g(t)$ tienen periodo p, entonces la función

$$h(t) = af(t) + bg(t)$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, también tiene periodo p. Por (2.1) se tiene que para cualquier $n \in \mathbb{Z}$

$$f(t + np) = f(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

por tanto,

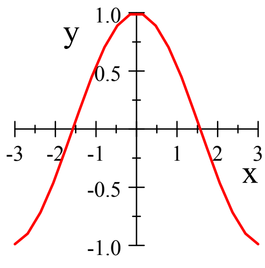
$$p, 2p, 3p, ...$$

también son periodos[1] de $f(t)$.

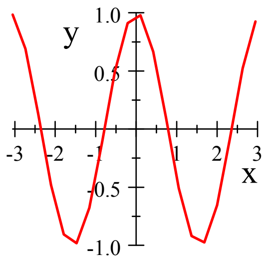
El problema principal de este capítulo será la representación de varias funciones de periodo $p = 2\pi$ en términos de las funciones simples, de periodo 2π,

$$\{1, \cos t, \sin t, \cos(2t), \sin(2t), ..., \cos(nt), \sin(nt), ...\}$$

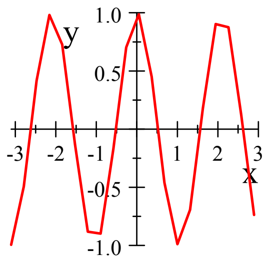
llamado **sistema trigonométrico**.



$\cos x$

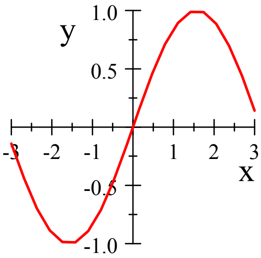


$\cos 2x$

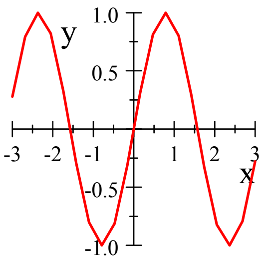


$\cos 3x$

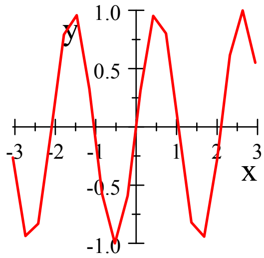
[1] Si una función periódica $f(t)$ tiene un periodo $p > 0$ que es el más pequeño de todos, este se denomina el periodo primitivo de $f(t)$. Por ejemplo, el periodo primitivo de $\sin t$ es 2π y el periodo primitivo de $\sin(2t)$ es π. Una función periódica sin periodo primitivo es $f \equiv const$.



$\sin x$



$\sin 2x$



$\sin 3x$

El sistema trigonométrico

$$1, \cos t, \sin t, \cos(2t), \sin(2t), ..., \cos(nt), \sin(nt), ...$$

es **ortogonal** en el intervalo $[-\pi, \pi]$ (y, en consecuencia, en cualquier intervalo de longitud 2π, debido a la periodicidad).

Por definición esto significa que la integral del producto[2] de cualesquiera dos de estas funciones diferentes sobre dicho intervalo es cero, es decir, para todo $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cos(nt)\ dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \sin(nt)\ dt = 0 \tag{2.2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \sin(mt)\ \ dt = 0 \tag{2.3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \cos(mt)\ \ dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq m, \\ \pi & \text{si} \quad n = m. \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) \sin(mt)\ \ dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq m, \\ \pi & \text{si} \quad n = m. \end{cases} \tag{2.5}$$

Las series que surgirán serán de la forma

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos(2t) + ... = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \tag{2.6}$$

---

[2]Recordar que
$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2 \cdot \sin\frac{\alpha\pm\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$
$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

donde $a_0, a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ...$ son constantes reales. Estas series se llaman **series trigonométricas**[3] y a los coeficientes $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ se les llama **coeficientes de la serie**.

Cada término de la serie (2.6) tiene periodo 2π. Por tanto si la serie (2.6) converge, su suma será una función de periodo 2π.

2.2. Serie de Fourier

Las funciones periódicas que se presentan en problemas prácticos con frecuencia son bastante complicadas y es deseable representarlas en términos de funciones periódicas simples. Se verá que casi cualquier función periódica $f(t)$ de periodo 2π que aparezca en las aplicaciones (por ejemplo, con relación a vibraciones) puede representarse por una serie trigonométrica la cual se denominará serie de Fourier de f.

Las series de Fourier surgen de la tarea práctica de representar una función periódica $f(t)$ dada en términos de funciones coseno y seno. Estas series son trigonométricas cuyos coeficientes se determinan a partir de $f(t)$ mediante ciertas fórmulas (fórmulas de Euler), las cuales se establecerán primero. Después se considerará la teoría de las series de Fourier.

2.2.1. Fórmulas de Euler para los coeficientes de Fourier

Supongamos que $f(t)$ es una función periódica de periodo 2π que puede representarse por una serie trigonométrica

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right), \tag{2.7}$$

es decir, se supone que esta serie converge y que tiene a $f(t)$ como su suma. Dada una función $f(t)$ como esta, quieren determinarse los coeficientes a_n y b_n de la serie trigonométrica correspondiente.

<u>Determinemos a_0.</u>

Al integrar ambos miembros de (2.7) se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right)\right] dt.$$

[3] Recordar que cualquier situación en la que está involucrada una serie funcional su convergencia requiere preocuparse por el comportamiento de sus sumas parciales

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right).$$

Si es posible realizar la integración término a término de la serie[4], se obtiene

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dt \\ &+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\ dt+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nt)\ dt\right).\end{aligned}$$

Claramente el primer término del segundo miembro

$$\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi a_0.$$

Además sabemos de (2.2) que las integrales del segundo miembro son cero. Consecuentemente,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt = a_0\pi,$$

es decir,

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt$$

Determinemos ahora $a_1, a_2, ...$ y $b_1, b_2, ...$

Multipliquemos (2.7) por $\cos(mt)$, donde $m\in\mathbb{Z}^+$, e integremos de $-\pi$ a π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(mt)\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}\left(a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)\right)\right)\cos(mt)\,dt$$

Al integrar término a término, se observa que el segundo miembro queda

$$\begin{aligned}&a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mt)\ dt\\ &+_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\cos(mt)\ dt+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nt)\cos(mt)\,dt\right).\end{aligned}$$

Sabemos de (2.2) que la primera integral es cero. Además de (2.4)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\cos(mt)\ dt=a_m\pi$$

y de (2.3)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nt)\cos(mt)\ dt=0.$$

[4] La idea consiste en suponer que la serie es uniformemente convergente, lo que permite integrar término a término.

Consecuentemente

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(mt)\ dt = a_m \pi$$

para todo $m \in \mathbb{Z}^+$.

Para determinar $b_1, b_2, ...$ se razona de manera análoga a lo anterior pero ahora multiplicando (2.7) por $\sin(mt)$, donde $m \in \mathbb{Z}^+$

Al escribir n en lugar de m, se obtienen las llamadas **fórmulas de Euler**

$$\boxed{\begin{array}{l} a_n = \dfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\ dt \text{ para todo } n \geq 0. \\[2ex] b_n = \dfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\ dt \text{ para todo } n > 0. \end{array}} \qquad (2.8)$$

Los números dados por (2.8) se denominan **coeficientes de Fourier** de $f(t)$. La serie trigonométrica

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \qquad (2.9)$$

con coeficientes $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ dados por (2.8) se denomina **serie de Fourier de** $f(t)$ (sin atender la convergencia, ésta la discutiremo más adelante)

Ejemplo 2 ***Onda cuadrada***

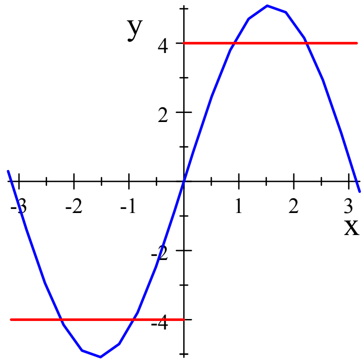
Determinar los coeficientes de Fourier de la función[5]

$$f(t) = \begin{cases} -k & \text{si} \quad -\pi \leq t < 0, \\ k & \text{si} \quad 0 \leq t < \pi. \end{cases} \qquad \text{y} \qquad f(t + 2\pi) = f(t).$$

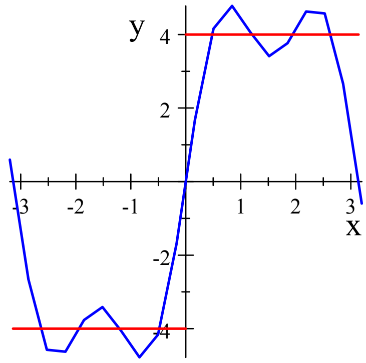
Las gráficas de las cuatro primeras sumas parciales $\{S_n\}_{n=1}^{4}$ de la Serie

[5] Funciones de este tipo se presentan como fuerzas externas que actúan sobre sistemas mecánicos, fuerzas electromotrices en circuitos eléctricos, etc (el valor de $f(t)$ en un sólo punto no afecta la integral, por lo que puede dejarse indefinida $f(t)$ en $t = 0$ y $t = \pm\pi$)

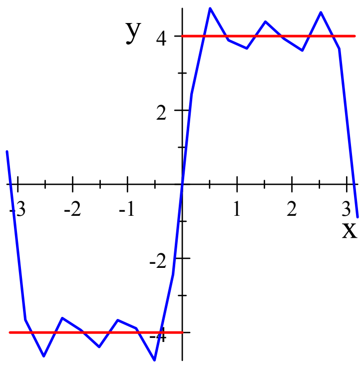
de Fourier de esta serie son



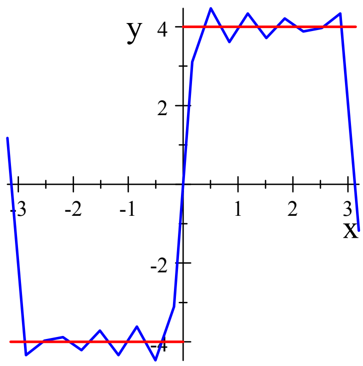
$$S_1 = \frac{4k}{\pi} \operatorname{sen} x$$



$$S_2 = \frac{4k}{\pi} \left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x \right)$$



$$S_3 = \frac{4k}{\pi} \sum_{n=0}^{2} \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen}(2n+1)\, x$$



$$S_4 = \frac{4k}{\pi} \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen}(2n+1)\, x$$

2.2.2. Convergencia de la serie de Fourier

Supongamos que $f(t)$ es cualquier función periódica dada de periodo 2π para la que existen las integrales de (2.8); por ejemplo, $f(t)$ es continua o tan sólo continua a trozos. Entonces pueden calcularse los coeficientes de Fourier (2.8) de $f(t)$ y utilizarlos para formar la serie de Fourier (2.9) de $f(t)$. Sería muy conveniente que la serie así obtenida convergiera y tuviera la suma[6] $f(t)$. La mayoría de las funciones que se presentan en las aplicaciones son tales que esto se cumple (salvo en los saltos de $f(t)$, los cuales discutiremos a continuación). En este caso, cuando la serie de Fourier $S(t)$

---

[6] Pero no siempre ocurre así, pues existen muchas funciones integrables e incluso continuas, cuya serie de fourier converge en uno o más puntos.

de $f(t)$ representa a $f(t)$, se escribe

$$f(t) = S(t)$$

con un signo de igualdad. Si la serie de Fourier de $f(t)$ no tiene la suma $f(t)$ o no converge, escribiremos

$$f(t) \sim S(t)$$

con una tilde $\sim$, lo que indica que la serie trigonométrica del segundo miembro tiene los coeficientes de Fourier de $f(t)$ como coeficientes[7], por lo que se trata de la serie de Fourier de $f(t)$.

El siguiente paso es plantear el problema de la convergencia de la serie de Fourier: hasta qué punto la serie de Fourier de una función es una representación válida de la misma. Nuestro propósito es presentar de manera adecuada un conjunto de condiciones que garanticen que la serie de Fourier de una función no solamente converja, sino que además *converja* a la función considerada.

Teorema 2.2.1 ***Condición suficiente de convergencia puntual de una serie de Fourier***

Sea $f(t)$ una función 2π-periódica[8], continua a trozos en el intervalo $[-\pi, \pi[$ y que tiene derivada por la izquierda y por la derecha en todo punto de dicho intervalo. Entonces la serie de Fourier de $f(t)$ converge y su suma[9] es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}.$$

Ejemplo 3 ***Onda cuadrada***

[7] Empezaremos por poner de manifiesto que la serie de Fourier de una función integrable en el intervalo $[-\pi, \pi]$ no está determinada biunívocamente por la función. Por ejemplo, dos funciones que coinciden en todo el intervalo $[-\pi, \pi]$, salvo en un número finito de puntos, definen la misma serie de Fourier.

[8] Por tanto al considerar series de Fourier, asumiremos que la función f está definida en el intervalo $-\pi \le t < \pi$ (o bien en el intervalo $-\pi < t \le \pi$) y que para los otros valores de la variable t, f viene determinada por la condición

$$f(t + 2\pi) = f(t).$$

[9] Observar que si $f(t)$ es continua en t_0, entonces $f\left(t_0^-\right) = f\left(t_0^+\right) = f(t_0)$ y la serie de Fourier converge a $f(t_0)$ ya que

$$\frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2} = \frac{f(t_0) + f(t_0)}{2} = f(t_0).$$

La onda cuadrada del Ejemplo 2 tiene un salto en $t_0 = 0$. *En este punto su límite por la izquierda es* $-k$ *y su límite por la derecha es* k, *por lo que el promedio de estos límites es* 0. *La serie de Fourier de la onda cuadrada converge en realidad a este valor cuando* $t = 0$ *ya que entonces todos sus términos son cero. Se procede de manera similar para los otros saltos. (Esto concuerda con el Teorema 2.2.1)*

2.3. Otras formas de las series de Fourier

La forma canónica de las series de Fourier es la que hemos estado utilizando hasta el momento, donde la función en cuestión estaba definida sobre el intervalo $[-\pi, \pi[$,

2.3.1. Serie de Fourier para una función de periodo $2L$

En muchas ocasiones es deseable adaptar la forma de una serie de Fourier a funciones periódicas de periodo $p = 2L > 0$ en el intervalo $[-L, L[$. Esto se consigue gracias a un cambio de variable.

Sea $f(t)$ una función periódica de periodo $2L$. Para desarrollar en serie de Fourier en $[-L, L[$ hacemos un cambio de variable, poniendo

$$\frac{t}{x} = \frac{L}{\pi},$$

entonces

$$f(t) = f\left(\frac{L}{\pi}x\right)$$

Si definimos

$$g(x) = f\left(\frac{L}{\pi}x\right)$$

claramente la función g es una función periódica de x de periodo 2π ya que

$$g(x + 2\pi) = f\left(\frac{L}{\pi}(x + 2\pi)\right) = f\left(\frac{L}{\pi}x + 2L\right) = f\left(\frac{L}{\pi}x\right) = g(x).$$

De esta forma si el desarrollo en serie de Fourier de la función $g(x)$ es

$$g(x) = f\left(\frac{L}{\pi}x\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \tag{2.10}$$

con coeficientes de Fourier

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)\ dx \text{ para todo } n \geq 0. \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)\ dx \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}} \tag{2.11}$$

entonces, como $x = \frac{\pi}{L}t$ sustituyendo en (2.10) y (2.11) se obtiene

$$g\left(\frac{\pi}{L}t\right) = f\left(\frac{L}{\pi}\frac{\pi}{L}t\right) = f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right),$$

y

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\ dt \text{ para todo } n \geq 0. \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\ dt \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}} \tag{2.12}$$

Generalmente se escribe $w_0 = \frac{\pi}{L}$, y por lo tanto,

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos(nw_0 t) + b_n \sin(nw_0 t)\right),$$

con

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos(nw_0 t)\ dt \text{ para todo } n \geq 0. \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\sin(nw_0 t)\ dt \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}}$$

Ejemplo 4 ***Onda cuadrada periódica***

Determinar la serie de Fourier de la función

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si \quad -2 < t < -1 \\ k & si \quad -1 < t < 1 \qquad con\ p = 2L = 4,\ L = 2. \\ 0 & si \quad 1 < t < 2 \end{cases}$$

2.3.2. Series de Fourier de funciones pares e impares

A continuación pasamos a considerar el desarrollo en serie trigonométrica de funciones pares e impares. En principio los conceptos desarrollados hasta ahora podrían haberse realizado en cualquier intervalo de longitud 2π. No obstante, el intervalo $-\pi \leq t \leq \pi$ tienen importantes ventajas a la hora de aprovechar las propiedades simétricas de las funciones.

Recordemos que una función $g(t)$, definida en un intervalo $[-L, L]$ con $L > 0$, es una **función par**[10] si $g(-t) = g(t)$ para todo $t \in [-L, L]$. Diremos que h es una **función impar**[11] si $h(-t) = -h(t)$ para todo $t \in [-L, L]$.

Las funciones $\cos(nt)$ son pares y las funciones $\sin(nt)$ son impares. También sabemos que si g es par, entonces

$$\int_{-L}^{L} g(t)\ dt = 2\int_{0}^{L} g(t)\ dt.$$

y si h es impar, entonces

$$\int_{-L}^{L} h(t)\ dt = 0.$$

Además es obvio que el producto $q = gh$ de una función par g y una función impar h es impar, ya que

$$q(-t) = -q(t).$$

Consecuentemente, si $f(t)$ es par, entonces el integrando $f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$ en (2.12) es impar, y $b_n = 0$. De manera similar, si $f(t)$ es impar, entonces $f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$ en (2.12) es impar, y $a_n = 0$. De esto deducimos el siguiente resultado

Teorema 2.3.1 ***Serie de Fourier de funciones pares e impares***
Sea f una función $2L$-periódica integrable de Riemann en $[-L, L]$.

(i) Si f es par la serie de Fourier de f es una serie de Fourier de cosenos

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right) t \tag{2.13}$$

donde los coeficientes $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ se determinan a partir de la función f según las fórmulas

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(t)\cos(nt)\ dt \text{ para todo } n \geq 0 \tag{2.14}$$

[10] La gráfica de esta función es simétrica con respecto al eje OY.

[11] la gráfica de una función impar es simétrica respecto del origen de coordenadas

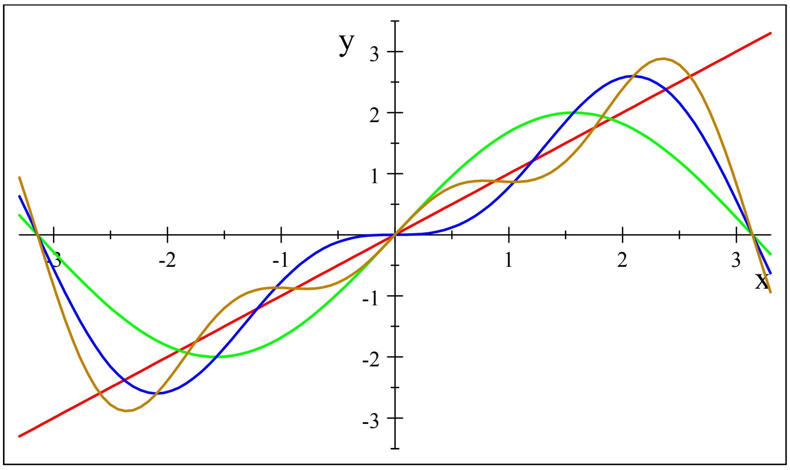
(ii) Si f es impar la serie de Fourier de f es una serie de Fourier de senos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) t \tag{2.15}$$

cuyos coeficientes $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ se determinan a partir de la función f según las fórmulas

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) t \, dt \text{ para todo } n = 1, 2, \ldots \tag{2.16}$$

Ejemplo 5 *Obtener la serie de Fourier de la función $f_1(t) = t$ en $[-\pi, \pi[$.*



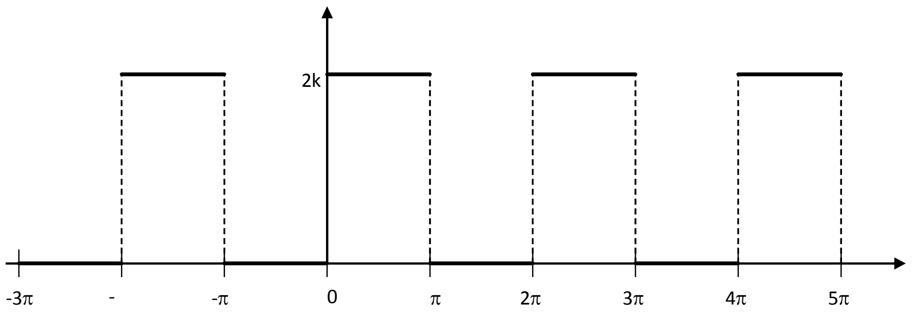
Teorema 2.3.2 ***Suma de funciones***

Los coeficientes de Fourier de una suma $f_1 + f_2$ son las sumas de los coeficientes de Fourier de f_1 y f_2 correspondientes.

Los coeficientes de Fourier de αf son el producto de α y los coeficientes de Fourier de f correspondientes.

Ejemplo 6 ***Pulso rectangular (pag40)***

La función $f^*(t)$ de la siguiente gráfica



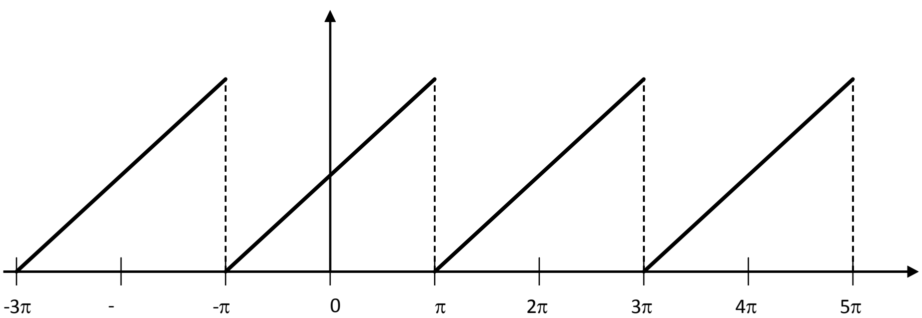
es la suma de la función $f(t)$ del Ejemplo 2 y la constante k. Por tanto, a partir de dicho ejemplo y del Teorema 2.3.2 se concluye que

$$f^*(t) = k + \frac{4k}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t) + ...\right).$$

Ejemplo 7 ***Onda diente de sierra (pag41)***

Determinar la serie de Fourier de la función

$$g(t) = t + \pi \ si \ -\pi \leq t < \pi \qquad y \qquad f(t+2\pi) = f(t).$$



2.3.3. Serie de Fourier en notación compleja

Supongamos que la función $f(t)$ satisface las condiciones suficientes de desarrollabilidad en serie de Fourier. Entonces es posible representarla en $[-T, T[$ mediante la serie del tipo

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \qquad (2.17)$$

Aprovechando las fórmulas de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

y

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

hallamos, con $x = nt$, que

$$\cos(nt) = \frac{e^{int} - e^{-int}}{2} \qquad \text{y} \qquad \sin(nt) = i\frac{e^{-int} - e^{int}}{2}. \tag{2.18}$$

Sustituyendo ahora (2.18) en (2.17) se obtiene

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\frac{e^{int} - e^{-int}}{2} + ib_n\frac{e^{-int} - e^{int}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}e^{int} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-int}\right) \end{aligned}$$

y si denotamos

$$\frac{a_0}{2} = c_0, \qquad \frac{a_n - ib_n}{2} = c_n \qquad \text{y} \qquad \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n}$$

entonces

$$f(t) \sim c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(c_n e^{int} + c_{-n}e^{-int}\right)$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} f(t) &\sim c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}e^{-int} \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{int} + \sum_{n=-+\infty}^{-1} c_n e^{int} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{int} + \sum_{n=-+\infty}^{-1} c_n e^{int} \\ &= \sum_{n=-+\infty}^{+\infty} c_n e^{int}. \end{aligned}$$

Esta es la llamada **forma compleja de la serie de Fourier o serie compleja de Fourier**.

Determinemos ahora la expresión de los coeficientes c_n y c_{-n}. Sabemos que

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \qquad \text{y} \qquad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\ dt - i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\ dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\cos(nt) - i\sin(nt)\right)\ dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-inw_0 t}\ dt
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
c_{-n} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\ dt + i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\ dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\cos(nt) + i\sin(nt)\right)\ dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{int}\ dt
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Claramente también podemos escribir

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-int}\ dt.$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Estos coeficientes reciben el nombre de **coeficientes complejos de Fourier** de $f(t)$.

Para una función de periodo $2L$, el razonamiento anterior da como resultado la serie compleja de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\left(\frac{n\pi t}{L}\right)}, \qquad c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,e^{-i\left(\frac{n\pi t}{L}\right)}\ dt.$$

Ejemplo 8 ***Serie compleja de Fourier***

Encontrar la serie compleja de Fourier de

$$f(t) = e^t \ \textit{si} \ -\pi \leq t < \pi \qquad y \qquad f(t+2\pi) = f(t)$$

y a partir de ella obtener la serie (común de Fourier).

2.4. Transformada de Fourier

Dada una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ llamaremos **transformada de Fourier** de f a la función compleja

$$\mathcal{F}\left[f\left(t\right)\right]\left(z\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t\right) e^{-izt}\ dt. \tag{2.19}$$

para todo $z \in \mathbb{R}$ donde la expresión anterior tenga sentido, es decir, donde la integral impropia anterior sea convergente[12].

Esta convergencia es más dificil de verificar que en el caso de la transformada de Laplace. Supongamos por ejemplo que t y z son reales, por lo que $e^{-izt} = \cos\left(tz\right) - i\sin\left(tz\right)$, que como sabemos tiene módulo 1. Si $f\left(t\right)$ es también real, para garantizar la convergencia absoluta de la integral anterior debe satisfacerse que

$$\lim_{t\longrightarrow\pm\infty} \left|f\left(t\right)e^{-izt}\right| = \lim_{t\longrightarrow\pm\infty} \left|f\left(t\right)\right| = 0$$

por lo que las funciones reales que tendrán transformada de Fourier tienen

[12] La integral impropia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t\right)dt = \int_{-\infty}^{c} f\left(t\right)dt + \int_{c}^{+\infty} f\left(t\right)dt$$

para todo $c \in \mathbb{R}$, se dice que existe o es convergente si existen los límites

$$L_A = \lim_{R\longrightarrow+\infty}\int_{-R}^{c} f\left(t\right)dt \qquad L_B = \lim_{R\longrightarrow\div\infty}\int_{c}^{R} f\left(t\right)dt$$

y entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t\right)dt = L_A + L_B.$$

Si

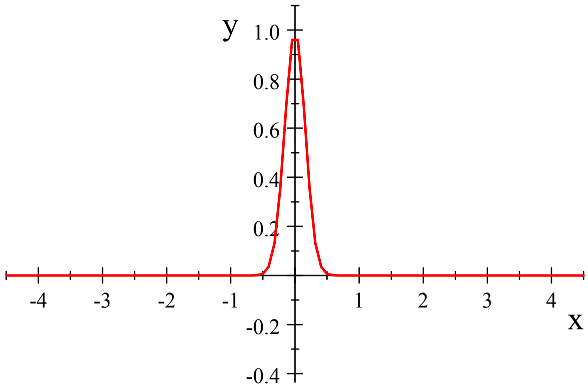
$$L_A + L_B = +\infty - \left(+\infty\right)$$

la integral no es convergente, pero si existe

$$\lim_{R\longrightarrow+\infty}\int_{-R}^{R} f\left(t\right)dt$$

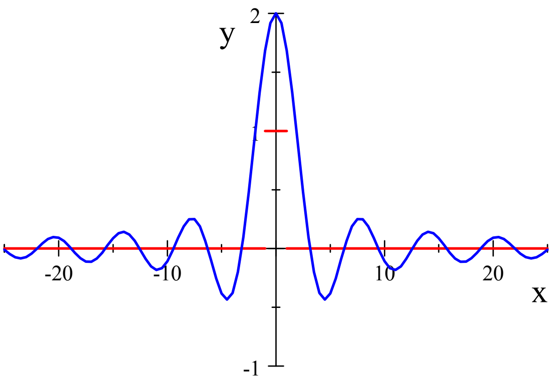
a éste límite le llamaremos valor principal de Cauchy de la integral impropia. Este valor principal coincide con el de la integral cuando ésta es convergente, por lo que en la integral impropia de la integral de Fourier se considera su valor principal.

que tener una gráfica como la siguiente



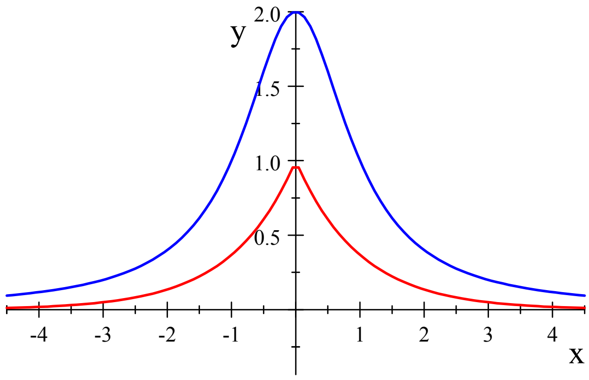
o bien ser nulas fuera de un intervalo compacto $[a, b]$.

Ejemplo 9 *Determinar la transformada de Fourier de la función* $f(t) = u_{-a}(t) - u_a(t)$*, donde* $u_a(t)$ *es la función de Heaviside (extendida a* $\mathbb{R}$*) para* $a > 0$*.*



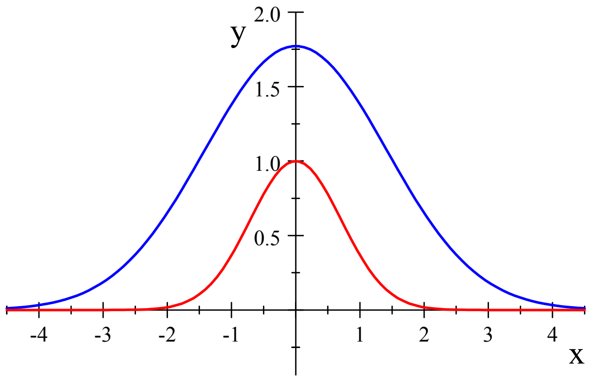
$f(t)$ y $\mathcal{F}[f(t)](z)$

Ejemplo 10 *Determinar la transformada de Fourier de la función* $f(t) = e^{-|t|}$*.*



$f(t)$ y $\mathcal{F}[f(t)](z)$

Ejemplo 11 *Determinar la transformada de Fourier de la función* $f(t) = e^{-t^2}$.



$f(t)$ y $\mathcal{F}[f(t)](z)$

2.4.1. Propiedades

Existencia

Las dos condiciones siguientes son suficientes para la existencia de la transformada de Fourier de un función $f(t)$ definida en $\mathbb{R}$ y son:

1. $f(t)$ es continua a trozos en $\mathbb{R}$.

2. $f(t)$ es absolutamente integrable[13] en $\mathbb{R}$.

Linealidad de la transformación de Fourier

Para cualesquiera funciones $f(t)$ y $g(t)$ cuyas transformadas de Fourier existen y para constantes a y b cualesquiera

$$\mathcal{F}[af(t)+bg(t)](z) = a\mathcal{F}[f(t)](z) + b\mathcal{F}[g(t)](z). \tag{2.20}$$

La prueba de esta propiedad viene directamente de la linealidad de la integral ya que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[af(t)+bg(t)](z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (af(t)+bg(t))\, e^{-izt}\, dt \\
&= a\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-izt}\, dt + b\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-izt}\, dt \\
&= a\mathcal{F}[f(t)](z) + b\mathcal{F}[g(t)](z).
\end{aligned}$$

Ejemplo 12 *Determinar la transformada de Fourier de la función* $f(t) = u_{-a}(t) - u_a(t) + e^{-|t|}$.

Transformada de Fourier de la derivada

Sea f una función continua y absolutamente integrable en $\mathbb{R}$ con

$$\lim_{|t|\longrightarrow+\infty} f(t) = 0$$

y f' continua a trozos en $\mathbb{R}$. Entonces

$$\mathcal{F}\left[f'(t)\right](z) = iz\mathcal{F}[f(t)](z) \tag{2.21}$$

La demostración de este resultado se realiza mediante la fórmula de integración por partes

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[f'(t)\right](z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\, e^{-izt}\, dt \\
&= \left[f(t)\, e^{-izt}\right]_{t=-\infty}^{t=+\infty} + iz\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-izt}\, dt \\
&= iz\mathcal{F}[f(t)](z)
\end{aligned}$$

[13] $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt < +\infty$

ya que

$$\lim_{|t|\longrightarrow+\infty}\left|f(t)\,e^{-izt}\right| = \lim_{|t|\longrightarrow+\infty}|f(t)| = 0$$

Mediante dos aplicaciones sucesivas de (2.21) se obtiene

$$\mathcal{F}\left[f''(t)\right](z) = iw\mathcal{F}\left[f'(t)\right](z) = (iz)^2\,\mathcal{F}\left[f(t)\right](z) = -z^2\mathcal{F}\left[f(t)\right](z).$$

Se aplicará lo mismo para derivadas superiores obteniendo que para $n \geq 1$

$$\mathcal{F}\left[f^{n)}(t)\right](z) = (iz)^n\,\mathcal{F}\left[f(t)\right](z).$$

Ejemplo 13 *Determinar la transformada de Fourier de* te^{-t^2}.

Cambio de escala

Sea $a > 0$. Si f es una función continua y absolutamente integrale en $\mathbb{R}$, entonces

$$\mathcal{F}\left[f(at)\right](z) = \frac{1}{a}\mathcal{F}\left[f(t)\right]\left(\frac{z}{a}\right)$$

La demostración de este resultado se realiza mediante el cambio de variable $at = s$ donde $adt = ds$ y como $a > 0$

$$\begin{array}{l} \text{si } t \longrightarrow +\infty \Longrightarrow s = at \longrightarrow +\infty, \\ \text{si } t \longrightarrow -\infty \Longrightarrow s = at \longrightarrow -\infty. \end{array}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[f(at)\right](z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(at)\,e^{-izt}\,dt \\ &= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\,e^{-iz\frac{s}{a}}\,ds \\ &= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\,e^{-i\frac{z}{a}s}\,ds = \frac{1}{a}\mathcal{F}\left[f(t)\right]\left(\frac{z}{a}\right). \end{aligned}$$

Ejemplo 14 *Determinar la transformada de Fourier de* $e^{-b|t|}$ *con* $b > 0$.

Derivada de la transformada

Si f es una función continua y absolutamente integrale en $\mathbb{R}$, entonces

$$i\frac{d}{dz}\mathcal{F}\left[f\left(t\right)\right]\left(z\right)=\mathcal{F}\left[t\cdot f\left(t\right)\right]\left(z\right)$$

Ejemplo 15 *Determinar la transformada de Fourier de* $e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Convolución

El objetivo es el mismo que en el caso de la transformada de Laplace : la convolución de funciones corresponde a la multiplicación de sus transformadas de Fourier

Sean f y g dos funciones continuas por secciones, acotadas y absolutamente integrables. Entonces

$$\mathcal{F}\left(f*g\right)=\mathcal{F}\left(f\right)\cdot\mathcal{F}\left(g\right). \tag{2.22}$$

Como

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(f\right)\cdot\mathcal{F}\left(g\right) &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(t\right)e^{-izt}\,dt\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}g\left(s\right)e^{-izs}\,ds\right)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(t\right)g\left(s\right)e^{-iz(t+s)}\,dt\,ds\end{aligned}$$

y haciendo ahora el cambio de variable $t+s=x$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(f\right)\cdot\mathcal{F}\left(g\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(t-s\right)g\left(s\right)e^{-izt}\,dt\,ds\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(t-s\right)g\left(s\right)\,ds\right)e^{-izt}\,dt\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(f*g\right)e^{-izt}\,dt=\mathcal{F}\left(f*g\right)\end{aligned}$$

2.5. Transformada de Fourier inversa

Sea $f\left(t\right)$ una función compleja de variable real que verifica:

1. Es continua o continua a trozos en cualquier intervalo finito de $\mathbb{R}$. Si es continua a trozos, en los puntos de discontinuidad[14] está definida por:
$$f(t) = \frac{1}{2}\left(f\left(t^-\right) + f\left(t^+\right)\right).$$

2. Contiene un número finito de extremos relativos.

3. Existe
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < +\infty$$

entonces se verifica **la fórmula de la integral de Fourie**r

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{izt}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-izt}\, dt\right) dz.$$

Sabemos que la transformada de Fourier de la función f es

$$\mathcal{F}\left[f(t)\right](z) = F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-izt}\, dt$$

por lo tanto la fórmula de la integral de Fourier puede escribirse como

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(z)\, e^{izt} dz$$

y escribimos

$$\mathcal{F}^{-1}\left[F(z)\right](t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(z)\, e^{izt} dz$$

que es la expresión de la transformada inversa de Fourier. Esquemáticamente

$$f(t) \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}} F(z)$$

Si $f(t)$ es una función dada, la expresión

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(z)\, e^{izt} dz$$

[14] Si no se cumple esta condición diremos que la fórmula integral de Fourier es válida o se cumple casí por todas partes. En las discontinuidades (que son de dalto finito) la fórmula converge a:
$$\frac{1}{2}\left(f\left(t^-\right) + f\left(t^+\right)\right).$$

es una ecuación integral de función incognita $F(z)$, de tipo singular por ser la integral impropia. La solución de esta ecuación integral es

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-izt}\, dt.$$

A $F(z)$ se le llama también función espectral de la función $f(t)$.

Por tratarse de una fórmula integral hereda las propiedades de la integración, en particular la linealidad

$$\mathcal{F}^{-1}[aF(z) + bG(z)](t) = a\mathcal{F}^{-1}[F(z)](t) + b\mathcal{F}^{-1}[G(z)](t)$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 16 *Consideremos la función*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si \quad |t| < a \\ 0 & si \quad |t| > a \end{cases}$$

Se pide:

1. *Determinar su transformada de Fourier.*
2. *Utilizar el apartado anterior para evaluar*
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(za)\cos(zt)}{z} dz.$$
3. *Deducir el valor de*
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} z}{z} dz.$$

2.6. Ejercicios propuestos

1. Verificar la ortogonalidad del sistema trigonométrico.
2. **Rectificador de media onda**

   Un voltaje senoidal $E\sin(wt)$, donde t es el tiempo, se hace pasar por un rectificador de media onda que corta la porción negativa de la onda. Encontrar la serie de Fourier de la función periódica resultante

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -L < t < 0, \\ E\sin(\omega t) & \text{si} \quad 0 < t < L, \end{cases} \qquad \text{con } p = 2L = \frac{4\pi}{\omega},\ L = \frac{\pi}{\omega}.$$

3. Consideremos la función $f(t) = |t|$. Se pide:

   a) Determinar la serie de Fourier de la extensión periódica de $f(t)$ en el intervalo $[-\pi, \pi[$.

   b) Usar el desarrollo obtenido para sumar la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

4. Consideremos la función

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -5 \le t < 0 \\ \\ 3 & \text{si} \quad 0 \le t < 5 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad f(t+10) = f(t).$$

   Se pide:

   a) Determinar los coeficientes de Fourier de la función.

   b) Escribir la serie de Fourier.

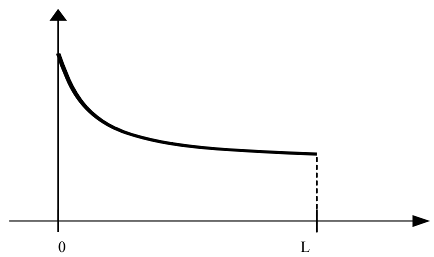
   c) ¿Como debería definirse $f(t)$ cuando $t = -5$, $t = 0$ y $t = 5$ para que la serie converga a $f(t)$ en $-5 \le 0 \le 5$.

5. Determinar la serie de Fourier de la función $f(t) = t^2$, $0 \le t < 2\pi$ y $f(t + 2\pi) = f(t)$. Con el resultado obtenido verificar que

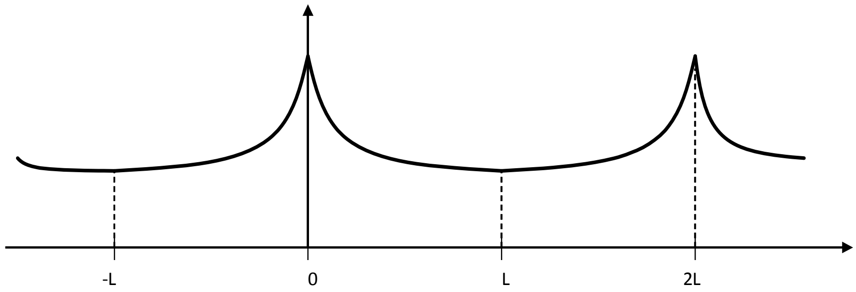
$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... = \frac{\pi^2}{6}.$$

6. **Desarrollos de medio rango**

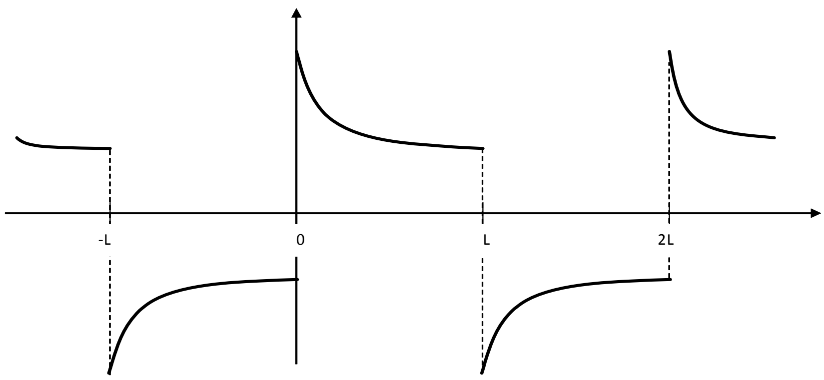
   En varias aplicaciones existe la necesidad práctica de usar series de Fourier en relación con funciones $f(t)$ que están dadas solamente en algún intervalo, por ejemplo, $0 \le t \le L$



   Podría extenderse $f(t)$ periódicamente con periodo L para después representar la función extendida por una serie de Fourier, la cual en general incluiría tanto términos coseno como seno. Sin embargo, hay una alternativa mejor mediante la cual se obtiene siempre una serie de cosenos al extender primero $f(t)$ de $0 \leq t \leq L$ como una función par en el intervalo $-L \leq t \leq L$,



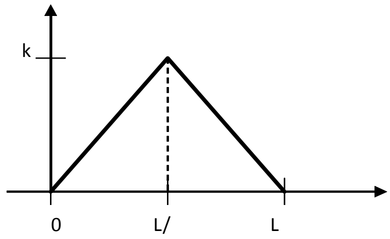
para después extender esta nueva función como una función periódica de periodo $2L$ y, como es par, representarla como una serie de Fourier de cosenos. O puede extenderse $f(t)$ como una función impar en el intervalo $-L \leq t \leq L$, como en la figura



para después extender esta nueva función como una función periódica de periodo $2L$ y, como es impar, representarla por una serie de Fourier de senos. Estas dos series se llaman los dos desarrollos de medio rango de la función $f(t)$, la cual está dada sólo en "la mitad del rango" (la mitad del intervalo de periodicidad de estas series).

Encontrar los dos desarrollos de medio rango de la función

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{2k}{L}t & \text{si} \quad 0 < t < \dfrac{L}{2} \\[2ex] \dfrac{2k}{L}(L-t) & \text{si} \quad \dfrac{L}{2} < t < L, \end{cases}$$



7. Explica razonadamente porque no existe la transformada de Fourier de la función $f(t) = 1$ con $t \in \mathbb{R}$. ¿Es f absolutamente integrable en $\mathbb{R}$?

8. Determinar la transformada de Fourier de la función

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & \text{si} \quad |t| \leq 1 \\ \\ 0 & \text{si} \quad |t| > 1 \end{cases}$$

9. Aplicando el resultado del ejercicio anterior determinar el valor de la integral

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{z \cos z - \operatorname{sen} z}{z^3} \right) \cos \frac{z}{2} \, dz$$

10. Para cualquier función par $f(t)$ la transformada de Fourier es la transformada de Fourier de coseno

$$\mathcal{F}_c [f(t)] (z) = \int_0^{+\infty} f(t) \cos (zt) \, dt$$

y su transformada inversa

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \mathcal{F}_c [f(t)] (z) \cos (zt) \, dz.$$

Resolver la ecuación integral

$$\int_0^{+\infty} f(t) \cos (zt) \, dt = \begin{cases} 1 - z & \text{si} \quad 0 \leq z \leq 1 \\ \\ 0 & \text{si} \quad z > 1 \end{cases}$$

11. Utilizar el ejercicio anterior para demostrar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

2.7. Ejercicios complementarios

1. Encuentra la transformada de Fourier de las siguientes funciones

   a) $f(t) = \begin{cases} \cos t & |t| < \pi/2 \\ 0 & |t| \geq \pi/2 \end{cases}$

   b) $f(t) = \begin{cases} a - |t| & |t| < a \\ 0 & |t| \geq a \end{cases}$

   c) $f(t) = \begin{cases} 0 & t < -2 \\ -1 & -2 \leq t < -1 \\ 1 & -1 \leq t < 1 \\ -1 & 1 \leq t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$

   d) $f(t) = u_0\left(t + \frac{1}{2}\right) - u_0\left(t - \frac{1}{2}\right)$

   e) $f(t) = \left(u_0\left(t + \frac{1}{2}\right) - u_0\left(t - \frac{1}{2}\right)\right)\sin(2t)$

   f) $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(at) & |t| \leq \pi/a \\ 0 & |t| > \pi/a \end{cases} \quad a > 0$

   g) $f(t) = \left(h_0\left(t + \frac{1}{2}\right) - h_0\left(t - \frac{1}{2}\right)\right)\cos(at)\,;\ a > 0$

   h) $f(t) = \begin{cases} 0 & \dfrac{a}{2} < |t| \\ 1 & \dfrac{a}{2} < |t| < \dfrac{b}{2} \\ 2 & |t| > \dfrac{b}{2} \end{cases}$

2. Calcula la convolución $(f * f)(t)$ en los siguientes casos:

   a) $f(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq a \\ 0 & |t| > a \end{cases} \quad a > 0$ b) $f(t) = e^{-|t|}$

3. Calcula la transformada de Fourier inversa de la función

$$F(z) = \frac{e^{-z^2}}{z^2+1}$$

4. Encuentra los desarrollos en serie de Fourier de las siguientes funciones periódicas (se da su valor en el intervalo $[-L, L[$ siendo $L = \dfrac{T}{2}$, con T su periodo.

(a) $f(t) = \begin{cases} -1 & t \in [-1,0[\\ 1 & t \in [0,1[\end{cases}$

(b) $f(t) = \begin{cases} t & t \in [-2,0[) \\ 0 & t \in [0,2[\end{cases}$

(c) $f(t) = t, \quad t \in [-1,1[$

(d) $f(t) = \begin{cases} -t & t \in [-1,0[\\ t & t \in [0,1[\end{cases}$

(e) $f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [-2,0[\\ 0 & t \in [0,1[\\ 1 & t \in [1,2[\end{cases}$

(f) $f(t) = \begin{cases} 0 & t \in [-2,1[\\ 1 & t \in [1,2[\end{cases}$

(g) $f(t) = \begin{cases} 0 & t \in [-L,0[\\ e^t & t \in [0,L[\end{cases}$

(h) $f(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \in [-L,0[\\ e^t & t \in [0,L[\end{cases}$